

**TAREFAS DIDÁTICAS COM USO DE EPISÓDIOS DE HISTÓRIA  
DA MATEMÁTICA VISANDO A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO  
SOBRE O TEOREMA DE TALES**

Benjamim Cardoso da Silva Neto

Adelino Candido Pimenta

Produto educacional apresentado como requisito parcial para conclusão de Mestrado  
Profissional em Educação para Ciências e Matemática.

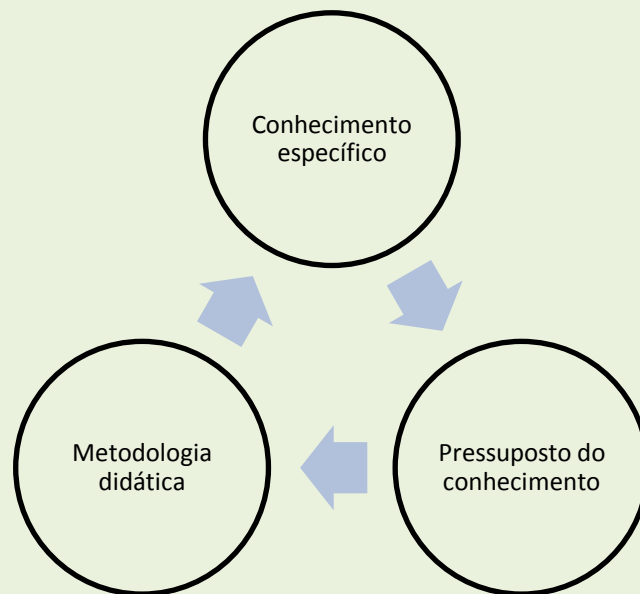
JATAÍ

2016



Este produto educacional serve para você Professor, para incentivar a produção de significado dos alunos nas aulas de Matemática sobre o conteúdo de Teorema de Tales.

Mas, antes de tudo, devemos perceber que o ENSINO deve perpassar por três eixos.



Utilize este material em suas aulas de Matemática. E incentive os seus alunos à produção de significado por meio da história da matemática.



Caro colega Professor.

Este produto educacional foi desenvolvido como parte da dissertação de Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí e consiste em uma sequência de tarefas didáticas que se utilizam de um episódio de história da matemática.

Ao elaborar este material levamos em conta a real e urgente necessidade de existência de uma mudança das práticas de sala de aula com o estabelecimento de recursos e teorias epistemológicas. Entendemos que o Ensino de Matemática deve utilizar meios de incentivar e motivar os alunos, desta forma o convidamos para apreciação do presente trabalho como forma de causar alguma movimentação em sua sala de aula, no que diz respeito à aprendizagem dos alunos.

Estruturamos alguns tópicos que norteiam a dissertação que estudou a aplicabilidade e validação das tarefas apresentadas neste produto. Afirmamos que o texto e as tarefas baseadas em episódio de história da matemática, que alguns autores consideram anedotário e outros não, foram tratados segundo a ideia de relatos tradicionais, descrito por Roque (2012b) e o eixo epistemológico foi o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Lins (1992), e o episódio de história da matemática foi tratado da forma que expressa Pereira, Santiago e Morais (2015).

## Sumário

### APRESENTAÇÃO

1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA .....	6
2 USO DE EPISÓDIOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA.....	10
3 O TEOREMA DE TALES .....	11
4 DUAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE TALES.....	16
5 PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO NA PERSPECTIVA DO MCS.....	19
6 A NOSSA PROPOSTA .....	25
7 AS TAREFAS .....	28
7.1 O texto episódico .....	28
7.1.1 Considerações sobre o texto .....	31
7.2 Tarefa I.....	32
7.2.1 Considerações sobre a tarefa I .....	33
7.3 Tarefa II.....	33
7.3.1 Considerações sobre a tarefa II .....	33
7.4 Tarefa III.....	34
7.4.1 Considerações sobre a tarefa III.....	34
7.5 Tarefa IV .....	34
7.5.1 Considerações sobre a Tarefa IV .....	34
REFERÊNCIAS .....	35

## APRESENTAÇÃO

A trajetória que explica o desenvolvimento histórico-epistemológico da matemática diante das faces cotidiana, escolar e científica é constituída pelo espaço em que a sociedade se constrói (MENDES, 2009). A discussão sobre o uso de história da matemática na sala de aula como um recurso que auxilia os procedimentos metodológicos tem instigado educadores e pesquisadores em ensino de matemática e proporcionado o surgimento de novas estratégias de ensino que valorizam a tomada de decisão dos alunos e a sua formação enquanto ser pensante.

Entendemos que o ensino de matemática é dificultado por ser considerada uma disciplina formal, abstrata e desvinculada de caráter prático no ensino tradicional (MICHALOVICZ, 2009). Amparados pela citação anterior, pensamos que a adoção de novas estratégias de ensino, novos recursos e métodos de aprendizagem tem se tornado um desafio constante em meio à complexidade do ato de ensinar.

Neste trabalho, desenvolvemos tarefas didáticas capazes de subsidiar a prática docente fazendo uso dos recursos que a história da matemática oferece. Segundo D'Ambrosio (1999, p.97) “as práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto é impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos”. A história da matemática é um instrumento que vem ganhando destaque no meio acadêmico e intelectual (BARONI; NOBRE, 1999).

Destacamos, no entanto, que para a incorporação substancial da história da matemática em sala de aula, podemos utilizar diversos métodos e estratégias. De acordo com Mendes (2009) por meio de um ensino mais dinâmico sustentado em novas metodologias, tais como, brincadeiras, atividades práticas e experimentais, textos, é que a aprendizagem da matemática se torna mais eficaz. Optamos, no entanto, incorporar em tarefas didáticas o uso de episódios históricos como forma instigadora e incentivadora para resolução de problemas sustentados no MCS.

O presente trabalho consiste em um protótipo desenvolvido durante o Mestrado em Educação par Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí no período de 2014 a 2016. Apresentamos tarefas didáticas amparadas metodologicamente na história da matemática e epistemologicamente no MCS para produção de significado.

Entendemos que um possível aprofundamento deste trabalho requer a leitura da dissertação que será disponibilizada em meios digitais e impressos, ficando os autores responsáveis a qualquer momento para as maiores informações sobre o trabalho. A aplicabilidade e validação das tarefas ocorreram por meio de estudos sobre produção de significado de alunos do 2º do Ensino Médio, que convém ressaltar que foram produzidos em diferentes direções, e não visamos o erro dos alunos, mas o processo.

## 1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

De acordo com Lara (2013, p.52) a matemática ensinada em sala de aula se constitui no “resultado de práticas desenvolvidas historicamente pela humanidade que originaram técnicas, estratégias e instrumentos como ação de lidar com situações de um determinado contexto e para garantir sua sobrevivência”. D’Ambrosio (1999) afirma que a História da Matemática se confunde com a História da Humanidade e o desenvolvimento da ciência e que as compreensões de como alguns conceitos se formaram e a organização das ideias das civilizações pode servir como um método para se ensinar matemática. Na mesma direção, Chaves (2004) e Chaves e Rodrigues (2014) defendem a História da Matemática como uma possível ruptura ao que denominam de Ensino Tradicional de Matemática (ETM), aquele em que a aula é expositivista e composta por uma pregação enunciativa em que o professor é o ser falante que se ocupa da exposição do conteúdo programático e o aluno o ser ouvinte que se ocupa da aceitação das “*verdades*” apresentadas.

No Brasil, as preocupações com a introdução de elementos históricos na Matemática escolar brasileira apareceram pela primeira vez na legislação da década de 1930, mais especificamente na Reforma Francisco Campos, consolidada em 1932 (ROQUE, 2012a). No entanto, informações históricas estiveram presentes antes dessa época em livros didáticos mais antigos, por meio de observações e comentários sobre temas ou personagens da História da Matemática e também em livros paradidáticos de, por exemplo, Cecil Thiré, Melo e Souza e Euclides Roxo, com isso surgiu uma crescente preocupação em preservar concepções historicamente produzidas (MIGUEL; MIORIM, 2011).

A inserção da História da Matemática na sala de aula, às vezes, não passa de pequenas apresentações nos livros ou biografias de matemáticos famosos, que podem ser aproveitadas e apresentadas aos alunos através de propostas para a aprendizagem da Matemática, propiciando uma compreensão mais ampla dos conceitos e dos métodos de conteúdos da disciplina (BRASIL, 2000). Reforçamos que se a história da matemática for tratada como um assunto específico, será insuficiente para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, deve estar em consonância com o conteúdo de Matemática e deve ser entendida como um processo em construção.

Percebemos que a presença da História da Matemática nos livros e materiais didáticos voltados para o Ensino Fundamental e Ensino Médio tem crescido desde 1980 (MIGUEL; MIORIM, 2011). O material histórico trazido nos livros didáticos é muitas vezes o único acesso dos alunos ao contexto histórico da Matemática. A aliança das aulas com novas propostas metodológicas que se utilizem do recurso tem proporcionado o aumento das pesquisas e estudos sobre esta tendência do Ensino de Matemática.

O uso da história da matemática sobre diferentes perspectivas é discutido em várias obras, Baroni, Teixeira e Nobre (2012, p.181), por exemplo, sinalizam que a inserção da “História da Matemática na Educação fortalece a sua relação com a Educação Matemática abrindo perspectivas de pesquisas em várias frentes”.

Entendemos que a história da matemática destaca o valor da disciplina em sala de aula e mostra aos alunos a sua amplitude, fazendo-os perceberem que a Matemática vai além dos cálculos. O seu uso pode servir a diversas situações, segundo Baroni, Teixeira e Nobre (2012) pode mobilizar os alunos, ser utilizada em todos os níveis educacionais, estimular o uso de bibliotecas, contribuir no processo de humanização da Matemática e aliar diferentes formas de serem incorporadas no ensino.

Mendes (2013) considera que o uso da história como recurso pedagógico pode promover um ensino e aprendizagem que busca dar ressignificação ao conhecimento matemático produzido ao longo dos tempos, acreditando que a história da matemática é capaz de durante a ação docente causar maior motivação e aprendizagem.

Uma visão mais profunda da História permite ao professor evoluir em seu trabalho educativo, pois dá a ele a possibilidade de ver melhor o futuro, ou seja, de enxergar antes, o que pode acontecer, as dúvidas que podem surgir. Além disso, permite que ele descubra as dificuldades do passado, comprovando os caminhos da invenção, com a percepção das ambiguidades e confusões iniciais (GROENWALD; SILVA; MORA, 2004).

O enfoque dado à história da matemática pelo professor leva os alunos ao processo de construção de conceitos, estruturas e fórmulas, aos precursores dos conhecimentos presentes nos livros didáticos. Não basta, por exemplo, aprender que  $a^2 = b^2 + c^2$  (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos) é a fórmula que expressa o Teorema de Pitágoras. É necessário adentrar na história, nas necessidades que levaram o homem a este conhecimento, quem foi Pitágoras, seus antecessores e sucessores, em quais contextos histórico e geográfico se deu a construção



do conceito. É nesse sentido que Chaves e Rodrigues (2014) defende o uso, em sala de aula, da História da Matemática, da Matemática, seus princípios e procedimentos, como ferramentas a serviço de leituras e de fatos que levem à construção de processos que sejam investigativos, tornando a Matemática não como algo pronto e acabado, mas em movimento, em evolução e transformação.

A exploração de um conteúdo por meio da história da matemática pode acontecer de diversas formas seja por meio de atividades, tarefas, reprodução de instrumentos, vídeos, peças teatrais, apresentação em seminários, cartazes. Sobre este pensamento Valdés (2002) afirma que se estabelecermos um laço entre o aluno, a época e o personagem relacionado com os conceitos estudados, e se o aluno conhecer as motivações e dúvidas que tiveram os sábios da época, então, assim, ele poderá compreender como foi descoberto e justificado um problema histórico matemático.

A história da matemática é considerada,

[...] um tema importante na formação do aluno, ela dá ao estudante a noção desta ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Esta visão da Matemática, faz com que a disciplina seja vista pelo aprendiz, como um saber que tem significado, que foi, e é, construído pelo homem para responder suas dúvidas na leitura do mundo, permitindo ao aluno apropriar-se deste saber, o que lhe propiciará uma melhor leitura do contexto mais global. (GROENWALD; SILVA; MORA, 2004, p.48).

Pode contribuir para o fazer matemática em sala de aula, permitindo que se entenda a Matemática como um processo de criação humana, evidenciando preocupações e necessidades de diferentes culturas em diferentes momentos históricos (BRASIL, 2000). E atuar como um instrumento que desmistifica, contextualiza, humaniza, motiva e ajuda a formalizar os conceitos matemáticos (D'AMBROSIO, 1996).

A mesma obra, ainda ressalta que o uso de história da matemática na sala de aula serve:

1 - para situar a matemática como manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução; 2- para mostrar que a matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de matemática desenvolvidas pela humanidade; 3- para destacar que essa matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século

XVII se organizou como um corpo de conhecimentos com um estilo próprio. (D'AMBROSIO, 1996, p.10).

A História da Matemática é permeada por informações históricas sem provas concretas, como é o caso do Teorema de Tales; informações históricas distorcidas, feitas pelo confronto das informações e aceitas como verdadeiras até a sua contradição; informações históricas ocultas, em que a veracidade é sempre questionada (NOBRE, 2004), mas é fato que em consonância com as práticas de sala de aula se transformam em pontos de diálogo, pesquisas, objeto de estudo para a promoção do processo ensino e aprendizagem, partindo de informações históricas reais ou fantasiosas.

Para Mendes (2001) existem dois caminhos para a abordagem da história da matemática em sala de aula, o primeiro deles é a pesquisa, em que o docente e os estudantes fazem uma busca pelas informações históricas de algum conteúdo matemático em específico, o segundo caminho é explorar as informações históricas contidas no material didático elaborando problemas para que os alunos possam solucionar por meio de atividades de ensino em que as informações históricas estejam presentes no corpo de enunciados, na forma de representações esquemáticas, reproduções de instrumentos. Estes caminhos podem ser feito de diferentes maneiras,

[...] conhecendo-se a 'origem' de determinado assunto como os sistemas de numeração ou o Cálculo, conhecendo-se as ideias que levaram à escolha de certos nomes para alguns elementos da matemática, por exemplo: o "cálculo", a função "seno"; outra maneira de atrair a atenção é citando os nomes de grandes matemáticos, salientando sua contribuição para o conhecimento humano. (VIANNA, 1998, p.07).

Miguel e Miorim (2011) defende nos argumentos reforçadores epistemológicos o uso de episódios ou problemas motivadores para sala de aula. Para a obra em curso a Matemática é uma disciplina dedutivamente orientada, pois seu desenvolvimento histórico explica que a dedução vem depois de certa maturidade e ainda possui várias questões e problemas intrigantes que podem ser levados para sala de aula para motivar os alunos. Neste sentido nos ancoramos em Pereira, Santiago e Morais (2015) quando traça o perfil de episódios históricos de matemática. As informações históricas reais ou anedotárias impulsionam a atenção das pessoas para a Matemática. A abordagem de conteúdos pelo viés histórico pode ser realizada de formas incentivadoras e que instiguem os alunos à compreensão e à produção de significado.

## 2 USO DE EPISÓDIOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Um episódio, de acordo com Pereira, Santiago e Morais (2015) pode ser construído de diversas maneiras, “um texto curto, num vídeo produzido, em uma peça, em forma de uma paródia ou música, ou mesmo em uma história em quadrinhos”. Pensamos que a utilização destes tipos de episódios facilita as práticas interdisciplinares, uma vez que o desenvolvimento da Matemática está imbricado e acompanha o desenvolvimento da sociedade.

Ainda segundo a obra supracitada um episódio ocorrido na História da Matemática é “um fato que conta uma descoberta matemática em uma extensão menor, podendo ser uma história ou estória, verdade ou ficção, que mostre um momento em que a sociedade teve ideias que deram forma a nossa cultura e ao seu desenvolvimento” (PEREIRA; SANTIAGO; MORAIS, 2015, p.93).

O uso de episódios históricos de matemática como recurso didático passa por alguns procedimentos que vão desde a escolha do conteúdo, o levantamento de informações, a idealização do meio que será apresentado aos alunos e a forma que os alunos trabalharão o recurso. A construção de um episódio voltado para a história da matemática requer leitura e dedicação para quem está propondo esse recurso. “Primeiramente, devemos escolher o conteúdo do qual o episódio irá tratar e a partir dele fazer um levantamento sobre sua história sob um ponto de vista social/cultural, de aplicação ou mesmo puramente matemático.” (PEREIRA; SANTIAGO; MORAIS, 2015, p.95-96).

A construção de episódios históricos de matemática inseridos em tarefas didáticas devem permitir ao aluno, i) associação com o cotidiano: os alunos devem entender que o surgimento de conceitos proveio de problemas básicos e que eles podem encontrar problemas semelhantes no dia a dia; ii) reconhecimento do período histórico e geográfico: onde eles fazem associação com os acontecimentos históricos da época e a região geográfica em que se deu o surgimento de algum conceito; iii) compreensão das informações: em que são capazes de entender o conteúdo que trata o episódio e as necessidades que levaram a criação dos conceitos; iv) produção de significados: promoção do conhecimento mediante suas justificações na resolução de tarefas didáticas.

Nesta perspectiva assumimos e julgamos que o aluno pode construir conceitos matemáticos e produzir significado nos moldes do MCS por meio da resolução de tarefas didáticas que utilizam episódios históricos da matemática. O uso dos episódios históricos nas aulas de matemática devem ainda propor atividades que envolvam os alunos. Evidenciamos como atividades, as tarefas didáticas assumindo o sentido expresso por Loth (2011) que caracteriza tarefas didáticas no pressuposto do Modelo dos Campos Semânticos.

### 3 O TEOREMA DE TALES

A história tradicional relata que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.C., viajou pela Grécia e Egito e influenciou o desenvolvimento da Matemática demonstrativa. Foi influenciado pelos conhecimentos dos egípcios, povos que desenvolveram um rigoroso sistema de medição de terras e também conhecidos pela adoção de métodos empíricos de calcular distâncias com cordas (BOYER, 1996).

Os egípcios fixados no curso inferior do Nilo eram caracterizados como um povo prático, utilitário, criativo e dedicado ao trabalho artesanal (GALVÃO, 2008). A matemática dos egípcios era intuitiva baseava-se na criação de ferramentas para resolução de problemas básicos para medição de terras, o que acabou influenciando o desenvolvimento da Geometria. O desenvolvimento da Geometria foi creditado aos egípcios devido às suntuosas construções, aos sistemas de divisão de terras durante as cheias do rio Nilo e sistema de cobranças de impostos o que acabou gerando a característica de ancestrais da cultura moderna (ROQUE, 2012b).

Santos, Muniz e Gaspar (2015, p.24) confirma a passagem acima quando afirma que “a geometria egípcia surge da necessidade de medir diferentes áreas de terras, determinar o valor do imposto a ser pago e também para calcular o volume de silos utilizados para armazenar grãos”. E mais,

É muito comum lermos que a geometria surgiu às margens do Nilo, devido à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas, após as enchentes, entre os que haviam sofrido prejuízos. Essa hipótese tem sua origem nos escritos de Heródoto, datados do século V a. C. quando das inundações do Nilo. (ROQUE, 2012b, p.71).

O desenvolvimento de uma Matemática prática e utilitária pode ter despertado interesse de outras civilizações em se aproximar do Egito favorecendo em meados do

TAREFAS DIDÁTICAS COM USO DE EPISÓDIOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA VISANDO A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO SOBRE O TEOREMA DE TALES

século VII a. C. a abertura ao intercâmbio comercial e intelectual ligando o Egito a outros povos, como a Grécia, por exemplo, que aproximou sábios gregos desejosos de expandir seus conhecimentos, tais como Tales e Pitágoras (CAJORI, 2007; SANTOS, 2012).

Os conhecimentos matemáticos dos egípcios teriam influenciado os gregos para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de técnicas para resolução de problemas, transformando uma Matemática empírica e intuitiva em dedutiva e abstrata (SANTOS, 2012). Tales, influenciado pelo conhecimento egípcio teria se destacado como um dos matemáticos gregos daquela época dando início a Geometria demonstrativa (EVES, 2004). De acordo Cajori (2007), Tales era um homem de imaginação estimável e de elevado conhecimento científico, considerado um Sábio da Grécia Antiga por apresentar explicações sobre o Universo e possuir uma posição econômica superior.

O que é interessante se ressaltar disso, no que se refere à matemática aplicada, uma vez que foi isso, dentre outros feitos, que deu notoriedade a Tales para ser incluído do grupo dos “sábios da Grécia” é que tal qual nos outros povos em que o pensador travou conhecimento, a matemática foi aplicada a problemas reais, por exemplo, o cálculo da altura da pirâmide, a distância de navios em alto mar, tanto quanto previsões astronômicas [...]. (PROVETTI JUNIOR, 2016, p.167).

Segundo Eves (2004, p.94) “os últimos séculos do segundo milênio a. C. testemunharam muitas mudanças econômicas e políticas”. O poder das civilizações egípcias e babilônias diminuiu e outros povos, dentre eles, os gregos passaram a primeiro plano. Com isso, a imersão da Idade do Ferro trazia instrumentos e ferramentas aperfeiçoadas contribuindo para o desenvolvimento da ciência, do comércio, das explorações geográficas, surgindo um novo tipo de civilização (EVES, 2004).

Ainda de acordo com esta obra, nesta época, o homem começou a formular questões de visualizações práticas como “*Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?*” e “*Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?*”. O conhecimento empírico dos egípcios contribuiu para estas formulações, porém este conhecimento só era possível para responder questões na forma de “como” e não eram suficientes para responder os “porquês”. A matemática dedutiva se impunha para um plano superior, fundando uma matemática moderna que segundo Eves (2004, p.94) estava numa “atmosfera de racionalismo” em que a razão começava a fazer parte das demonstrações de problemas matemáticos.

De acordo com Eves (2004) o racionalismo impulsionou a Geometria demonstrativa iniciada no século VI a. C. por Tales de Mileto. Chaves e Rodrigues (2014) defende que o raciocínio matemático foi utilizado primeiramente por Tales, que teria de certa forma posto uma organização ao conhecimento dedutivo matemático, perpassando do “*como fazer?*” para o “*por que fazer?*” no trabalho sobre o Teorema de Tales ou Teorema dos Proporcionais. Tales, ao que se tem escrito, teria nascido por volta 640 a. C, em Mileto, na Grécia Antiga e falecido por volta de 548 a. C., iniciou sua vida profissional como mercador trabalhando com prensas de azeitonas na fabricação de azeite, rico empreendedor previu colheitas e dedicou a parte final de sua vida aos estudos (EVES, 2004). Devido a sua influência econômica e intelectual era convidado por outras civilizações para fornecer contribuições científicas e compreensões a respeito do Universo.

Segundo Santos (2012) existem dúvidas quanto à origem e obras de Tales de Mileto. Mas em relatos tradicionais, o primeiro a anunciar suas descobertas foi Heródoto, em obra escrita por volta de 440 a.C. depois da morte de Tales. Para Boyer (1996) o conhecimento que se tem sobre Tales é muito pouco, mas as hipóteses sobre sua existência e descobertas são plausíveis, assim como as provocações e convites por conta da sua inteligência. Tales de Mileto, no entanto, teria sido um dos grandes matemáticos gregos e suas descobertas evidenciaram uma Matemática mais formal, moderna. Reforça essa ideia Nobre (2004, p.534) quando afirma que “a não existência de documentos comprobatórios relativos a fatos relevantes na História da Ciência levou os historiadores a juntarem informações para se reconstruir a história de forma aproximada àquilo que de fato possa ter acontecido”.

Chaves e Rodrigues (2014) tece considerações a respeito do teorema creditado a Tales, no entanto, muitos livros, tais como Boyer (1996) e Eves (2004) creditam a Tales de Mileto também os seguintes teoremas: (a) o diâmetro efetua a bissecção de um círculo; (b) os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; (c) ângulos opostos pelo vértice são iguais; (d) se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então os triângulos são iguais; (e) um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto; e Pereira (2005) acrescenta (f) algumas retas paralelas determinam sobre duas transversais, segmentos proporcionais.

Este último teorema ainda segundo Pereira (2005) ficou conhecido como Teorema de Tales e também como o Teorema Fundamental da Geometria Elementar ou



ainda o Teorema dos segmentos proporcionais. Neste momento podemos inferir que foram os gregos que estabeleceram um pensamento lógico às estruturas matemáticas empíricas existentes e trabalhadas pelas civilizações antigas, como os egípcios. Os Elementos de Euclides nos facultam a tecer tal inferência.

Boyer (1996) afirma que o Teorema de Tales pode ter sido descoberto por Tales durante suas viagens pelo Egito e Babilônia, e a tradição traz uma espécie de demonstração para o teorema. Os relatos encontrados em materiais da História da Matemática descrevem as realizações de Tales em suas atividades mais práticas.

Diógenes Laertius, seguido por Plínio e Plutarco, relata que ele mediu a altura das pirâmides do Egito observando os comprimentos das sombras no momento que a sombra de um bastão vertical é igual à sua altura. Heródoto, o historiador, conta a estória da predição do eclipse solar; o filósofo Aristóteles relata que Tales fez uma fortuna monopolizando as prensas de azeite num ano em que a colheita de azeitonas prometia ser abundante. (BOYER, 1996, p.32).

De acordo com Huisman (2001), Eves (2004), Chaves e Rodrigues (2014) e Roque (2012b) o Teorema de Tales teria se fundamentado quando Tales de Mileto foi solicitado pelos escribas do faraó no Egito Antigo, a calcular a altura de uma Pirâmide ainda quando vivia na região. O episódio que não se sabe ao certo se é verdadeiro ou falso (LINTZ, 1999), marcou a construção da Matemática pela relevância em se observar a interação entre a Matemática e a natureza, pois Tales teria medido a altura da pirâmide por meio de sua sombra. Não sabemos de fato como ocorreu a medição da altura da pirâmide, pois não existem evidências escritas que comprovem a autoria de Tales de Mileto e devido às várias interpretações sofreu alterações dificultando a separação da história daquilo que é lenda (PEREIRA, 2005).

O problema da altura da pirâmide era de natureza essencialmente prática. A Grécia e o Egito possuíam engenharia e arquitetura suntuosas que envolviam proporcionalidade e paralelismo de retas, talvez, por meio de conhecimentos empíricos, Tales teria conseguido solucionar o problema da altura da pirâmide sem escalá-la por meio dos conhecimentos já imbricados em meio às civilizações (PEREIRA, 2005).

Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz

que ele fincou verticalmente uma vara e fez o uso da semelhança de triângulos. (EVES, 2004, p.115).

Ao que parece, Tales teria medido a altura de objetos pequenos, de forma que pudesse alcançar sua altura e observado a posição do Sol medindo o comprimento da sombra dos objetos e deduzido que no momento que o comprimento da sombra equivalesse a altura do objeto o mesmo seria válido para a pirâmide. Santos (2012, p.51) evidencia este pensamento afirmando que “Tales teria escrito a razão entre as medidas do comprimento do objeto e da sombra projetada e, imediatamente, registrado o comprimento da sombra projetada pela pirâmide e relacionado com a altura desconhecida da pirâmide”. Tales conhecendo a ideia de proporcionalidade poderia desenvolver corretamente os cálculos necessários.

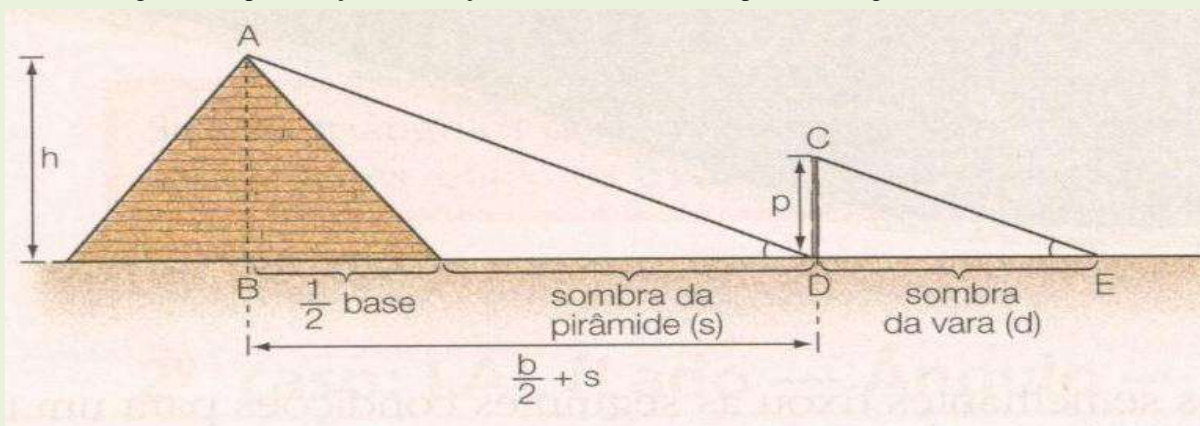
Representação da medição da altura da Pirâmide por Tales segundo Hierônimos



Fonte: Mendes 2009, p.26.

Na versão de Plutarco, Tales ainda teria somado ao comprimento encontrado da sombra que representava a altura da pirâmide a distância da base da pirâmide ao seu centro para que encontrasse a altura exata, pois, segundo Garbi (2009, p.9) a pirâmide Quéops possui “base quadrada e 230 metros de lado”.

Figura 2: Representação da medição da altura da Pirâmide por Tales segundo Plutarco



Fonte: Iezzi; Dolce; Machado, 2009, p.117.



A existência de conhecimentos prévios sobre o Universo garantia uma explicação matemática para a solução do problema da altura da pirâmide. A Pirâmide Quéops foi construída de maneira que uma das faces fosse voltada para o sul, fazendo com que a sombra fosse perpendicular no momento que o Sol estivesse no ponto mais alto da pirâmide, ao meio dia (SANTOS, 2010).

De acordo com Santos (2012) a origem do Teorema de Tales se deu devido a forma apresentada, em conjunto com os fatores naturais e a empiria do conhecimento das civilizações. Não se sabe se de fato Tales de Mileto existiu, mas atribuiu-se a ele este episódio da história da matemática que pautou e dividiu muitos estudiosos do VI século a. C., uma vez que o paralelismo de retas e a proporcionalidade foram evidenciados neste problema.

#### 4 DUAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE TALES

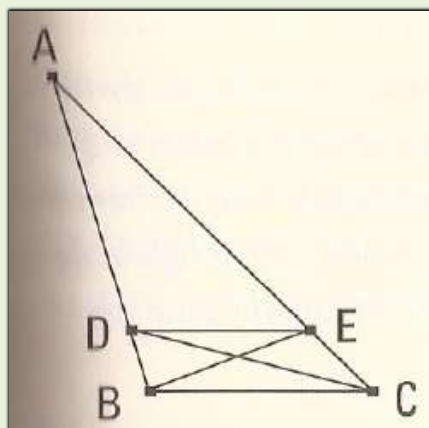
De acordo com Pereira (2005) a primeira demonstração do Teorema de Tales “surgiu três séculos depois da existência de Thales, localizada na proposição 2 do Livro VI dos ‘Os Elementos’ de Euclides”. Trazemos essa demonstração neste produto educacional como forma de compreender a estrutura do teorema. Seguimos a apresentação utilizando o livro “Os Elementos” de Euclides em obra traduzida por Irineu Bicudo em 2009.

Proposição:

Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo. (EUCLIDES, 2009, p.233).

Esquemática da proposição.

Esquemática do Teorema segundo Os Elementos de Euclides



Euclides (2009, p.233), tradução de Irineu Bicudo

Passamos a apresentação da demonstração segundo a mesma obra, tomando como base a figura anterior. Fique, pois, traçada a DE paralela a um dos lados, o BC, do triângulo ABC; digo que, como a BD está para a DA, assim a CE para EA. Fiquem pois, ligadas as EB, CD. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; pois estão sobre a mesma base DE e nas mesmas paralelas DE, BC; mas o triângulo ADE é algum outro. E as iguais têm para a mesma a mesma razão; portanto, como o triângulo BDE está para o [triângulo] ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Mas, por outro lado, como o triângulo BDE para o ADE, assim BD para DA; pois, estando sob a mesma altura, a perpendicular traçada do E até o AB, estão entre si como as bases. Pelas mesmas coisas, então, como o triângulo CDE para o ADE, assim a CE para a EA; portanto, também como a BD para a DA, assim a CE para a EA. Mas, então, fiquem cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como a BD para a DA, assim a CE para a EA, e fique ligada a DE; digo que a DE é paralela à BC. Tendo, pois, sido construídas as mesmas coisas, como a BD está para a DA, assim a CE para EA, mas por um lado, como a BD para a DA, assim o triângulo BDE para o triângulo ADE, e, por outro lado, como a CE para a EA, assim o triângulo BDE para o triângulo ADE, assim o triângulo CDE; e estão sobre a mesma base DE. Mas, os triângulos iguais e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas. Portanto, a DE é paralela à BC. Portanto, caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo; o que era preciso provar. (EUCLIDES, 2009, p.233-234).

Essa demonstração presente em Euclides (2009) nos remete ao uso dos segmentos proporcionais, que é trabalhado nesta pesquisa. De acordo com Bongiovanni (2007);

A questão da proporcionalidade era de grande importância para os gregos, principalmente na arquitetura e agrimensura. Por isso, conjectura-se que a primeira sistematização da geometria pode ter sido em torno da questão da proporcionalidade de segmentos determinados

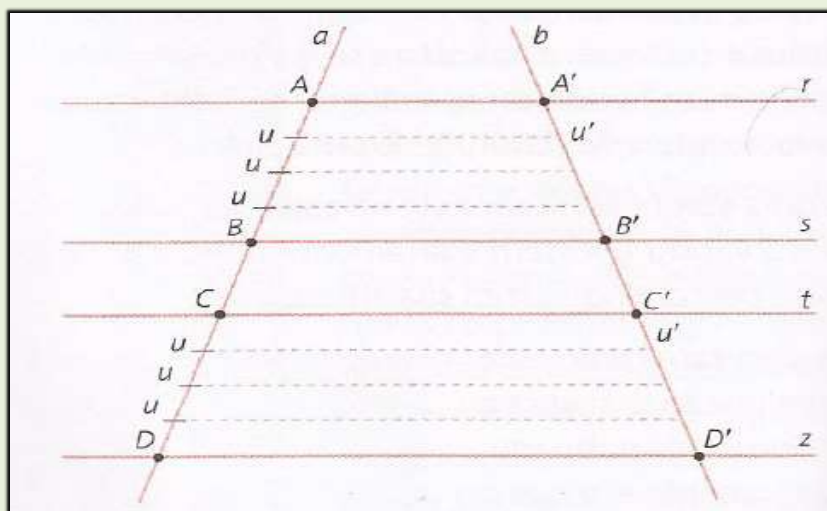
por um feixe de retas paralelas e outro de retas transversais. Essa questão durante muitos séculos foi denominada de teorema dos segmentos proporcionais. No final do século XIX, na França, alguns autores denominaram esse resultado de teorema de Tales, denominação que persiste até hoje. (BONGIOVANNI, 2007, p.99).

Para Haruna (2000) e Pereira (2005) as primeiras evidências sobre a demonstração do Teorema de Tales nos livros escolares aconteceu na Itália, Alemanha e França enfatizando a demonstração baseada em segmentos proporcionais e também em semelhança de triângulos. No Brasil por volta do final do século XX foi que o termo Teorema de Tales e suas demonstrações começaram a surgir nos livros escolares.

De acordo com Bongiovanni (2007) os livros didáticos apresentam em geral a demonstração para o Teorema de Tales, de forma incompleta, apenas para as medidas comensuráveis. E a exemplo desta informação trazemos a demonstração para o Teorema de Tales presente no livro didático Dante (2013).

Considerando um feixe de paralelas e duas transversais.

Feixe de retas paralelas e retas transversais



Fonte: Dante, (2013, p.236).

A obra passa a demonstração;

Vamos supor que exista um segmento  $u$  de modo que  $AB = mu$  e  $CD = nu$  ( $m, n \in \mathbb{IN}$ ), ou seja, que  $AB$  e  $CD$  são números racionais. Estabelecendo a razão  $\frac{AB}{CD}$ , obtemos:  $\frac{AB}{CD} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}$  \*. Pelos pontos que dividem  $AB$  e  $CD$  em  $m$  e  $n$  partes congruentes ao segmento de medida  $u$ , traçamos retas paralelas ao feixe. Desse modo, os segmentos  $A'B'$  e  $C'D'$  ficam divididos em  $m$  e  $n$  partes iguais a  $u'$ , respectivamente. Temos  $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{mu'}{nu'} = \frac{m}{n}$  \*\*. Das relações \* e \*\*, concluímos que:  $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ . Podemos também enunciar o teorema de Tales assim: Um feixe de retas paralelas determina, em duas

transversais quaisquer, segmentos proporcionais. (DANTE, 2013, p.236).

Por trás do Teorema de Tales existe um trabalho com os segmentos proporcionais, que possui uma relevância para o processo de desenvolvimento da Matemática na História. Os livros didáticos trazem a demonstração do teorema por um método apenas, utilizando os comensuráveis (dois segmentos AB e CD são comensuráveis, se existem um segmento  $u$  e dois inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $AB = m.u$  e  $CD = n.u$ ) da mesma forma como os pitagóricos trabalhavam deixando de lado os segmentos incomensuráveis (PEREIRA, 2005).

O Teorema de Tales, desenvolvido ou não por este personagem, faz parte da construção da Matemática, que sempre teve como ponto de partida a resolução de problemas práticos. Como mencionamos a origem do Teorema de Tales, em relatos tradicionais, foi o problema do cálculo da altura de uma pirâmide em suas passagens pelo Egito. Colocamos que esta ideia foi crucial para o desenvolvimento de nossas tarefas, em que por meio de “relatos tradicionais” (ROQUE, 2012b), foram elaboradas partindo de um episódio de história da matemática (PEREIRA; SANTIAGO; MORAIS, 2015), a medição da altura da pirâmide, visando à produção de significado de acordo com o MCS (LINS, 1993).

## 5 PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO NA PERSPECTIVA DO MCS

“Os artigos em Educação Matemática estão recheados de frases envolvendo ‘conhecimento do aluno’, ‘conhecimento matemático’ e significado” (LINS, 1993, p.77), mas nenhum deles traz uma discussão sobre que conhecimento está sendo tratado, o que é conhecimento e como ele é formado. Lins (1993) afirma que todo pesquisador deve evidenciar sua posição epistemológica em seus trabalhos. Nesta perspectiva, conduzimos a uma explicação daquilo que vem a ser o MCS o qual adotamos como posição epistemológica.

O MCS foi desenvolvido por Romulo Campos Lins em 1992 em sua tese de doutorado intitulada “A framework for understanding what algebraic thinking is” (Um quadro de referência para entender o que é pensamento algébrico). Após o ano de 1994 muitos pesquisadores passaram a utilizar o MCS como fundamentação teórica em pesquisas em Educação Matemática (SAD, 2000).

Romulo Campos Lins ao desenvolver o MCS procurava “dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando ‘erravam’, mas sem recorrer a esta ideia de erro” (LINS, 2012b, p.11), levando os alunos a questionarem suas respostas, produzindo significado. “Um significado pode ser transmitido de uma pessoa a outra através do uso de algum elemento intermediário: linguagens, desenhos, gestos, disposição de objetos” (LINS, 1997, p.39). Lins, no entanto, queria propor um tratamento para aquilo que era considerado *errado* da mesma forma que as coisas consideradas *certas*, recorrendo ao conceito de conhecimento.

O MCS desenvolvido por Lins (1992) sugere uma teoria a ser posta em movimento, em suas palavras uma “teorização”. As ideias de Educação Matemática enfatizadas por Romulo Campos Lins estão apoiadas no MCS, e segundo o autor (1999, p.85) um campo semântico em seu modelo “é algo que se constitui na própria atividade de produção de significados, não tendo, portanto, intenção de dizer o que deve ser, sendo ao invés o que está sendo”. Para ele o aspecto central de toda a aprendizagem, em termos de cognição humana, é a produção de significado.

Em seus trabalhos sobre o MCS, Lins tentava responder o que é conhecimento e o que é significado. Conhecimento para Lins (1993, p.88) “é entendido como uma crença – algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação”.

“O significado de um objeto é aquilo que se efetivamente diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade. Objeto é aquilo para que se produz o significado” (LINS, 2012b, p.28). A consequência do que aponta a obra supracitada é que produzir significados é dizer que foram produzidas ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade (PAULA, 2012a).

Lins (2012b, p.13) afirma que “uma pessoa acredita em algo que diz se age de maneira coerente com o que diz”. Sobre a constituição de objetos (SAD, 2000) afirma que;

[...] o *conhecimento* tem por elementos constitutivos uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação. O que nos faz estar diante de um *sujeito do conhecimento*, ou seja, de uma existência interdependente e intrínseca do conhecimento a partir do sujeito, e também, do sujeito do conhecimento (produtor assujeitado). Começamos então a evidenciar *conhecimento* como algo dinâmico, do domínio da fala, da enunciação e que, uma vez admitido, nos permite

afirmar alguns pontos importantes em termos epistemológicos. (SAD, 2000, s.p).

Na sala de aula o conhecimento que um aluno adquire durante uma aula não é fácil de ser interpretado, mas é fato que este conhecimento adquirido está atrelado a outros fatores, dentre eles, a forma como o conteúdo é ministrado ao aluno e também aos significados que ele pode produzir sobre um determinado conteúdo de Matemática. Qualquer professor deve reconhecer que o aluno deve participar ativamente do processo ensino e aprendizagem e também, que deve estar de acordo que é preciso conhecer o conhecimento dos alunos, não basta apenas examinar o que ele crê que é verdade, tem que entender a justificção para aquilo que o aluno acredita (LINS, 1994).

Corroborar com esta ideia o que é escrito em outro produto educacional;

A apresentação do conteúdo não é uma garantia de que o aluno, que quer aprender, irá conseguir entender o que você está expondo. O que estamos querendo salientar é que o processo comunicativo nunca ocorre de forma plena e o que você diz, nem sempre é o que o aluno entende. (PAULA, 2012b, p.12).

Para Lins (2012b, p.28, grifo do autor) “significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade”. É importante considerarmos que, a noção de atividade tomada pelo MCS, é aquela desenvolvida por Leontiev que é responsável pelo desenvolvimento da teoria psicológica da atividade.

Para Leontiev, atividade é um processo psicologicamente caracterizado pelo objeto e pelo motivo. É, portanto, o conjunto de ações e operações que satisfazem alguma necessidade especial do homem quando ele realiza alguma relação com o mundo, em um determinado contexto. Um exemplo: a caçada (=objeto) para conseguir o alimento (=motivo) é uma atividade. (SANTOS, 2007, p.44-45).

O objeto, por sua vez, é aquilo para que se produz significado.

O sujeito acredita naquilo que está afirmando, o que implica que ele acredita estar autorizado a ter aquela crença. Mas não é suficiente que a pessoa acredite e afirme; é preciso também que ela justifique suas crenças-afirmações para que a produção do conhecimento ocorra. Porém, o papel da justificção não é explicação à crença-afirmação, mas tornar sua enunciação legítima, o que faz com que as justificções tenham um papel central no estabelecimento do conhecimento do sujeito. (SILVA, 2003, p.19).

Para Lins (1999; 2012b) a justificação é o que dá direito ao sujeito a produzir uma enunciação dirigida a um interlocutor, que se constitui em um ser cognitivo que por sua vez, dá legitimidade a sua enunciação. Desta maneira na justificação do sujeito é que as diferenças ocorrem a partir das enunciações. Ribeiro, Costa e Paula (2014, p.3) apontam que é a partir daí que “podem surgir algumas implicações, como o fato de que uma crença-afirmação pode apresentar justificações distintas e, assim se constituem como conhecimentos diferentes”. E ainda exemplificam;

Quando afirmamos que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$  (crença-afirmação). Uma justificação apresentada poderia ser ‘para somar frações com denominador diferente achamos o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, esse resultado passa a ser o novo denominador e utilizamos a receita: divide pelo denominador e multiplicamos pelo numerador, depois somamos os numeradores.’ Outra justificação apresentada poderia ser ‘para somar as frações encontro sua frações equivalentes de mesmo denominador, e depois somamos o numerador.’ Observe que nesse exemplo, apresentamos duas justificações para uma mesma crença-afirmação, ou seja, uma mesma crença-afirmação, mas conhecimentos distintos. Essa situação ocorre em nossas salas de aula frequentemente, os alunos operam de forma parecida, mas com justificações distintas. (RIBEIRO; COSTA; PAULA, 2014, p.3).

São apresentadas justificativas diferentes, dizemos que foi produzido significado diferente, assim, as operações ocorreram em núcleos diferentes. E ressaltamos que o professor deve compreender e analisar a justificativa do aluno para aquele conhecimento que ele empregou no interior de uma atividade, antes de qualquer coisa, deve entender de onde veio aquele conhecimento, mesmo julgando a justificação do aluno como errada (RIBEIRO; COSTA; PAULA, 2014). Para o MCS não existe erro, se o aluno tem uma justificativa para uma resposta, então ele é capaz de produzir significado, que pode não ser da mesma forma que o professor, mas para o aluno existe alguma coerência.

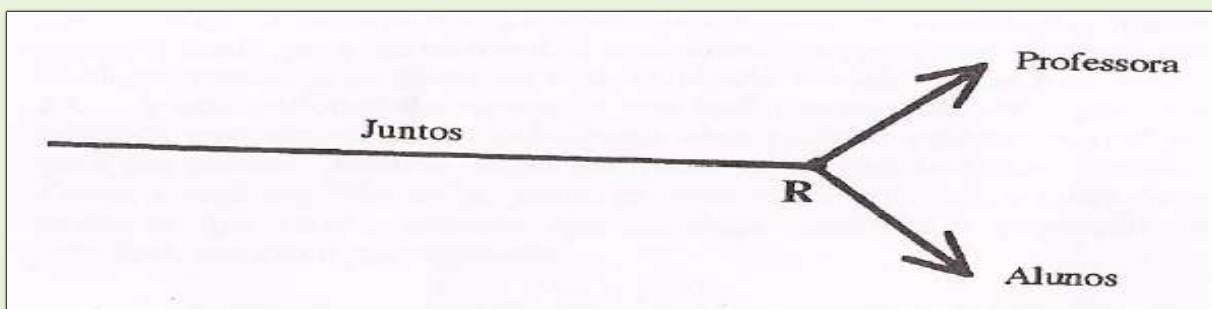
Na prática em sala de aula o aluno é passível de produção de significado, sua experiência e interação social alimenta a informação de mundo facilitando essa produção, pois ele vivencia sua vida real. Como pressupõe Lins (1997) a escola é o lugar de tematizações, de formulações e seu papel é o de introduzir nos alunos em sistema de significados os conceitos científicos como parte da organização da atividade humana. “A noção de significado no MCS não é ambiciosa, ela é pragmática e pretende ser prática o bastante para tornar as leituras suficientemente finas.” (LINS, 2012b, p.28).



Sobre a produção de significados, Silva (2003, p.21) considera que: “o ponto central é que produzimos significados para que pertençamos a uma prática social ou, em escala maior, a uma cultura, tanto quanto produzimos enunciações pelo mesmo motivo”. O interesse do MCS, para Santos (2007, p.40) “i) não é olhar para estados e produtos e sim para os processos; ii) é entender o que as pessoas dizem e por que dizem o que estão dizendo, em vez de olhá-las pelo erro”. O que importa não é mostrar que o sujeito está certo ou errado com relação a um questionamento (problema), e sim aceitar que ele produziu algum tipo de significado.

Podemos exemplificar uma produção de significado de alunos da educação infantil. Uma professora propõe para os alunos a adição “ $2 + 2$ ”, enquanto ela opera pensando em uma expressão aritmética e nos princípios lógicos da adição, os alunos pensam que possuem duas trufas de chocolate e ganham mais duas. Neste sentido Lins (1993) destaca uma metáfora geométrica que aqui enfatizamos utilizando suas palavras e esquematizações.

Primeira representação geométrica sobre o percurso do conhecimento



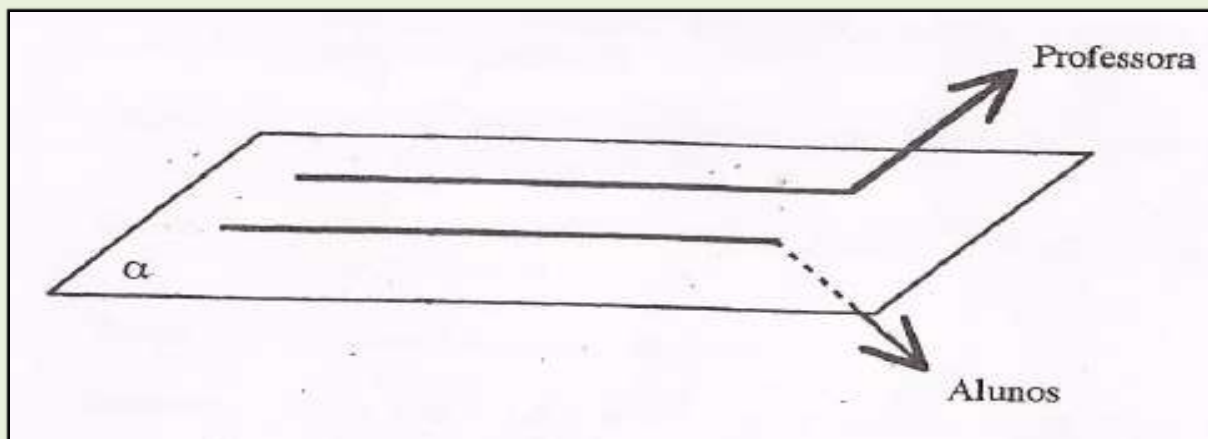
Fonte: Lins (1993, p.81).

Para Lins 1993, a professora e os alunos caminham em uma mesma direção até o ponto “R” onde ocorre uma ruptura e os alunos seguem uma direção diferente. Percebemos que não há problema na resolução dos alunos, pois eles possuem o domínio de todas as técnicas para resolver o problema (LINS, 1993), porém operam em um campo semântico igual o da professora, mas acabam tomando outra direção.

Lins (1993) nos chama a atenção para o fato de que a figura antecedente não era o que imaginávamos, onde até a bifurcação “R” havia uma só trilha. Para o autor a posição de onde se deve olhar deve ser no nível de um plano “ $\alpha$ ”.

Segunda representação geométrica sobre o percurso do conhecimento





Fonte: Lins (1993, p.83).

Ainda de acordo com Lins (1993) os alunos e a professora seguem caminhos diferentes para uma mesma situação. Acreditam naquilo que são capazes de justificar. A professora opera com sua aritmética e os alunos operam por meio de sua vivência de mundo, uma matemática da rua adquirida que tem sua própria significação. Neste sentido os alunos produzem significado para o objeto que constroem. Um mesmo discurso é parte de conhecimentos diferentes (LINS, 1993, p.83). O mesmo autor nesta mesma obra ainda aponta que um conhecimento é um par ordenado em que uma das coordenadas é a crença-afirmação e a outra é a justificação e que um conjunto de pares ordenados (conhecimentos) é um campo semântico.

Para Lins (1992) um campo semântico é visto como a atividade de produzir significado em relação a um núcleo, aquilo que não requer justificações. É Esta perspectiva é adotada neste trabalho. Enveredamos pelo recurso metodológico história da matemática em busca da produção de significado de alunos ao solucionarem atividades que intencionamos em chamar de tarefas didáticas. Operamos a produção de significados dos alunos segundo as noções-categorias descritas por Silva (2003).

E enfatizamos que no MCS o significado é local, pois acontece naquele momento da atividade, e em outros pode ser diferente. O que Lins (2008) coloca e nos chama a atenção é que ensinar é sugerir modos de produção de significado e que aprender é a internalização destes modos de produção. Sentimos este feito na prática. E somente compreendemos o MCS, quando o inserimos em nossa sala de aula, independente da pesquisa, o MCS acontece em ação.

## 6 A NOSSA PROPOSTA

Em busca de uma nova maneira de proporcionar a aprendizagem de Matemática e explorando uma possível aliança entre a história da matemática e o MCS é que decidimos concordar com Lins e Gimenez (1997) quando escreve que;

O problema que temos hoje está mal colocado. O problema da Educação Matemática não pode ser apenas o de descobrir maneiras melhores de ensinar matemática escolar, mas também não basta decidirmos que a matemática escolar atual deva ser substituída por isso ou aquilo, não se trata de ‘novos conteúdos’. Qualquer que seja a matemática que se institucionalize como escolar, o mesmo processo de fossilização acontecerá. O que precisamos é de uma perspectiva diferente, é preciso reconceitualizar o papel da escola. (LINS; GIMENEZ, 1997, p.20).

Em nossas tarefas utilizamos a história da matemática de maneira episódica explorando outros conhecimentos que os alunos já possuem e associando a estruturação do conceito do Teorema de Tales. O diferencial de nossas tarefas é a inserção do recurso derivado da história da matemática, o uso de episódios de história da matemática.

Quando o professor adota a produção de significado no que é proposto no MCS para fazer parte de sua metodologia em sala de aula deixa de avaliar o aluno pelo erro valorizando o processo que ele desenvolve para chegar ou não a solução de um problema dado. A Educação Matemática vem buscando e propondo instrumentos metodológicos cada vez mais novos que podem ser utilizados pelos professores em suas aulas (BARONI; NOBRE, 1999). Buscando essas novas metodologias Santos, Gaspar e Muniz (2015, p.15) afirma que “a história da matemática é um desses instrumentos que extrapola o campo da motivação e abarca elementos que interligam o conteúdo e o fazer pedagógico”.

O que nos motivou para a adoção destas tarefas foi o fato de querermos levar para a sala de aula problemas que possam fazer os alunos produzir significado. As tarefas que produzimos tem como conteúdo principal o Teorema de Tales, através da semelhança de triângulos e no corpo das tarefas trazemos o recurso didático história da matemática. Em outras palavras buscamos elaborar tarefas, que promovam a produção de significado e que nos permita a leitura desta produção de acordo com as noções-categorias do MCS.

A produção das tarefas didáticas que adotamos segue o contexto expresso por Loth (2011) que adequamos para inserção da história da matemática em seu formato episódico. Assim podemos citar que de acordo com Loth (2011) as tarefas:

I – São produzidas para uso em salas de aulas reais;

II – As tarefas devem exigir dos alunos a leitura e interpretação de textos;

III – As tarefas possuem contexto, possibilitando ao aluno oportunidades de discussão e debates em sala de aula.

IV – As tarefas não devem visar o erro, mas sim o processo que o aluno toma, sua tomada de decisão sobre o caminho que deve seguir.

Acrescentamos ao que é colocado por Loth (2011) a inserção de um recurso didático às tarefas, a história da matemática proporcionando a leitura de fatos históricos em seus enunciados. Não nos opomos às características que possuem as tarefas sinalizadas por Loth (2011), apenas incrementamos algo a mais. Da mesma forma, outros recursos didáticos, podem ser incorporados em tarefas que intencionem a produção de significado.

A mesma autora ainda aponta que uma boa tarefa deve:

(a) observar os diversos significados sendo produzidos pelos alunos e incentivar que esses significados se tornem objeto de atenção dos alunos; (b) deixar claro que os significados produzidos por eles e/ou os significados oficiais da matemática são alguns entre os vários significados que podem ser produzidos a partir daquela tarefa; (c) tratar do que é matemático, junto com os significados não matemáticos que possivelmente estejam presentes naquele espaço comunicativo. (LOTH, 2011, p.19).

A inserção de fatos do passado em tarefas didáticas se consolida como uma nova ferramenta para o trabalho com a história da matemática, mesmo sendo o início de uma aliança entre esta tendência do ensino de matemática e o MCS. Desta forma, “o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano” (CHAQUIAM, 2015, p.13).

Buscamos em nosso referencial apresentar tarefas familiares e não-usuais (SILVA (2003). Familiar, “no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo” (SILVA, 2003, p.53). Queremos sair de uma perspectiva de questão certa ou questão errada da forma que encontramos em alguns livros didáticos com enunciados que se resumem a apenas “*resolva*” ou “*calcule os*

*problemas seguintes*” ou então “*encontre o valor de x*” utilizando o Teorema de Tales, para uma perspectiva que dê condições aos alunos de pensarem, de inquirir e produzirem suas próprias justificações.

A característica que Silva (2003) atribui sobre ser não-usual, permite perceber até onde o aluno pode ir falando. E o papel do professor é conhecer as legitimidades dos alunos, naquela atividade, e saber em que direção o aluno está falando (LINS, 2008). Estabelecemos neste ponto mais uma vez nosso interesse em adotar o MCS como método epistemológico e reforçamos a utilidade de sua presença em salas de aula.

De acordo com Lins (1993), a História da Matemática deve ser entendida como um estudo da organicidade do conhecimento de uma cultura e desta forma é que o estudo do conhecimento de um aluno deve ser conduzido. O MCS nos propõe este caminho, uma base para o estabelecimento de nosso estudo.

Pereira, Santiago e Morais (2015) sugere que a escolha das tarefas e dos temas que serão abordados em seu teor histórico-matemático, deve ser feita por aqueles temas em que os alunos apresentem dificuldades em sala de aula favorecendo a ultrapassagem de obstáculos epistemológico-históricos e a mesma obra ainda destaca que outro ponto importante é o título e a forma que os episódios são apresentados aos alunos. Os títulos do episódio que desenvolvemos foram criados pensando em um estabelecimento de um convite para a leitura dos alunos. As tarefas em nossa percepção também devem possuir título e que o mesmo instigue a resolução dos problemas propostos.

Sabemos que existem uma série de atividades, tarefas e situações-problemas que colaboram com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Proporcionar aos alunos uma variedade de tarefas é fundamental para a aquisição de habilidades, destrezas e capacidade de raciocínio (LOPES; GIMENEZ, 2009).

Construímos nosso episódio sobre o Teorema de Tales em formato de texto tornando a Matemática mais viva e interessante para os alunos. O problema que enfatizamos no episódio diz respeito ao cálculo da altura de uma Pirâmide no Egito Antigo feito por Tales de Mileto. Tentamos tornar o texto interessante o bastante para que os alunos compreendessem como foi estruturado o teorema.

Passamos agora a apresentar o texto episódico e as tarefas propostas para o produto educacional baseado no uso de episódio de história da matemática nos moldes do MCS. Ressaltamos que evidenciamos subtópicos para o texto e para cada tarefa.

## 7 AS TAREFAS

### 7.1 O texto episódico

#### Tales de Mileto no desafio da Pirâmide

Localização geográfica do Egito e Grécia Antigas



Fonte: Google images.

O homem na Antiguidade aprendeu a se movimentar pelo uso da razão. Começou a indagar o *como* e o *porquê* das coisas. Começou a formular questões.

*Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?*

*Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?*

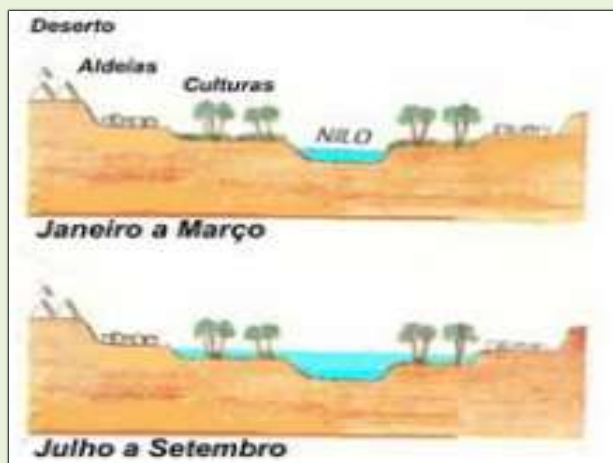
Questões que nas experiências práticas das civilizações eram triviais. Os processos empíricos eram suficientes para responder como, mas não eram o bastante para explicar os porquês. A partir daí, figura a importância de diversos estudiosos que tentavam entender o Universo e a natureza, como foi Tales de Mileto.

Tales nasceu em Mileto, na Turquia por volta de 624 a. C. e faleceu por volta de 548 a. C., foi filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo. Estava inserido em dois cenários de diferentes civilizações que guardam riquezas e mistérios culturais e intelectuais, o Egito e a Grécia. A região em que nasceu e cresceu estava localizada em um importante trecho comercial, segundo a história tradicional Tales por meio de observações astronômicas previu uma rica colheita de azeitonas, daí investiu em prensas de azeite, tornando-se rico empreendedor, a partir daí, talvez sua fama instaurada possibilitou seu reconhecimento e viagens a trabalho entre as regiões do Mar Mediterrâneo.

A Matemática egípcia era intuitiva e empírica baseada em experimentações práticas e por necessidades cotidianas da civilização para medição de terras, durante as

cheias do Rio Nilo, por exemplo. Os egípcios aprimoraram técnicas de medições de terras, talvez daí tenha surgido o termo “*Geometria*” que para os egípcios significava medição da terra. E com a atuação dos gregos a Geometria acabou ganhando um tratamento dedutivo e abstrato, tornando-se ainda mais prática e necessitando de demonstrações.

Representação das cheias do Nilo



Fonte: Doberstein (2010, 27).

No cenário grego, Tales se destacou pela sua elevada inteligência e foi considerado um dos sete sábios da Grécia Antiga. Na Grécia, era sábio aquele que conseguisse fornecer explicações sobre o Universo e Tales conseguiu, interpretou eventos da natureza, previu eclipses e épocas de chuvas, por fim, transformou a Matemática em uma ciência mais formal e rigorosa, é dele, por exemplo, o teorema que diz que “*um feixe de retas paralelas determinam sobre duas transversais segmentos proporcionais*” que se tornou um dos teoremas fundamentais da Geometria Elementar, o Teorema de Tales.

Tales, segundo a história, tornou-se rico por empreender em prensas de olivas, produzindo e vendendo azeite, fazendo a previsão de períodos de secas e chuvas para os agricultores das regiões porque passava. Foi ele quem iniciou a Geometria Demonstrativa, aquela que é validada por demonstrações puramente matemáticas.

E é dele os teoremas:

- *Qualquer diâmetro divide um círculo em duas partes iguais.*
- *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*
- *Dois ângulos opostos por um mesmo vértice são iguais.*

Durante sua passagem pelo Egito Antigo, Tales teria sido abordado pelos escribas de um faraó para que realizasse a medida da altura de Quéops, uma das



pirâmides do Egito, construída por volta de 2650 a. C.. Estima-se que foram utilizados cerca de 100 mil trabalhadores, por cerca de 30 anos, e o que sabemos é que foi uma construção bem arquitetada por estar de pé até hoje.

Tales não recusou o desafio, não podia escalar a pirâmide, mas realizou a medição utilizando a sombra da pirâmide originando um dos teoremas mais emblemáticos da Matemática.

Pirâmides de Gizé



Fonte: Doberstein (2010, p.92).

No desafio dos escribas do faraó, Tales, de posse de um bastão encontrou por semelhança de triângulos a altura da pirâmide. Percebeu que no momento em que a projeção da sombra de um bastão de madeira adquiriu tamanho igual ao seu comprimento, por semelhança, a altura da pirâmide também seria igual ao comprimento de sua sombra. Assim, considerou que os segmentos, comprimento da sombra do bastão e comprimento da sombra da pirâmide, eram proporcionais.

Representação da medição da altura da pirâmide



Fonte: Mendes (2009, p.26).

Uma representação para o cálculo da altura da pirâmide seria,

$$\frac{\textit{altura do bast\~ao}}{\textit{comprimento da sombra do bast\~ao}} = \frac{\textit{altura do pir\~amide}}{\textit{comprimento da sombra da pir\~amide}}$$

Busto de Tales de Mileto



Fonte: Souza (2010, p.8).

*“A coisa mais extensa do mundo é o Universo, a mais rápida é o pensamento, a mais sábia é o tempo e a mais cara e agradável é realizar a vontade de Deus”.*

*Tales de Mileto*

### 7.1.1 Considerações sobre o texto

Neste texto buscamos introduzir o conteúdo a ser trabalhado em sala de maneira plausível e que todos participassem da leitura do texto. É importante a disposição circular das carteiras e a leitura em voz alta para que todos participem e interajam do momento. Segundo Brolezzi (2015, p.27) “falar sobre história da matemática é, no fundo, conversar sobre matemática e a natureza particular desse conhecimento socialmente construído”. O texto episódico tem o fundamento de servir de arranque para a aula.

Intitulamos o texto de “Tales de Mileto no desafio da pirâmide”, como se fosse apenas um dos episódios que o personagem tenha participado. O poder que o título exerce diz respeito ao estabelecimento de um convite à leitura, que mais uma vez ressaltamos, a apresentação de episódio de história da matemática pode vir exposto de várias formas, mas que possuam o objetivo de informar, situar, instigar e incentivar a produção de significado dos alunos. Entendemos que o texto permite a inserção de conhecimentos, geográficos, históricos, da arte, da religião, filosóficos e matemáticos



envoltos no episódio possibilitando mais ainda a instrução da pesquisa e busca por novas informações.

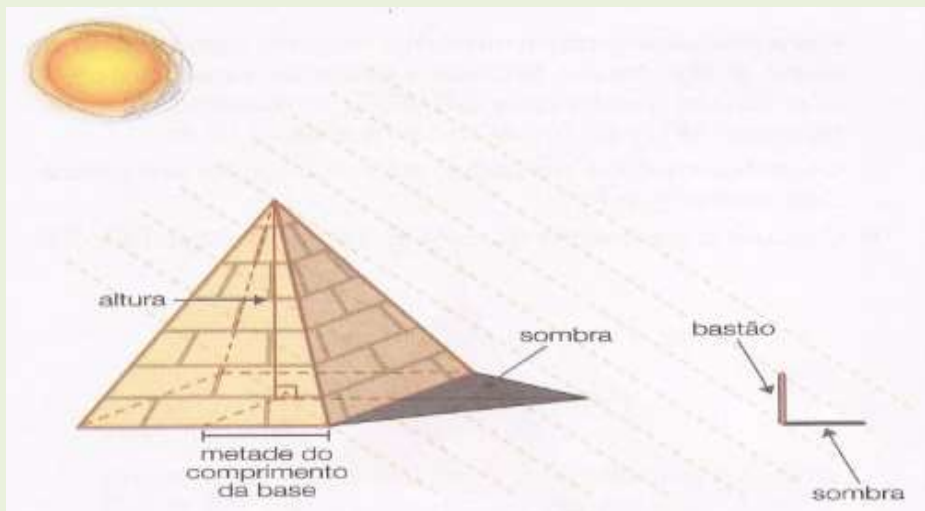
## 7.2 Tarefa I

### Tales e o problema da altura da pirâmide

Leia o texto que segue:

Tales de Mileto (624 a. C – 547 a. C.) é considerado um dos mais célebres gênios da Matemática da Antiguidade. A história deste grande matemático e filósofo relata que ele, ao se deparar com um problema de medição da altura de uma pirâmide, fincou um bastão verticalmente no chão e esperou o momento do dia em que a sombra do bastão fosse igual ao seu tamanho real, para isto, realizava constantes medidas até o momento oportuno e ideal, quando enfim a altura do bastão correspondia à altura de sua sombra, nesse instante, Tales mediu o comprimento da sombra da pirâmide e a este valor adicionou à metade do comprimento da sua base, pois a soma dessas medidas, segundo Tales, correspondia à altura da pirâmide.

Representação da medição da altura da pirâmide por sua sombra



Fonte: Souza (2010, p.266).

Questionamos:

a) Se Tales utilizando este método encontrou a medida da altura da pirâmide, então, a medição da altura da pirâmide aconteceu em determinado momento do dia? Qual? Justifique.

b) Como esse método, utilizado por Tales, permite que se descubra a altura da pirâmide? Comente com suas palavras.

c) Se este método fosse utilizado em outro momento do dia, por exemplo, o momento em que a sombra do bastão fosse igual à metade da altura dele, o resultado poderia ser encontrado? De que forma? Justifique.

### 7.2.1 Considerações sobre a tarefa I

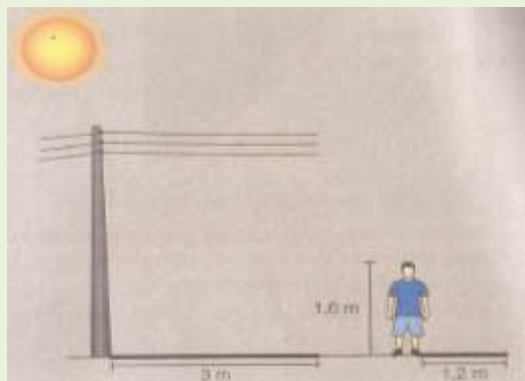
O objetivo desta tarefa é entender a abstração dos alunos sobre o método utilizado por Tales de Mileto na leitura do texto. A tarefa envolve uma interação com o conhecimento de rua, oriundo de sua vivência fora da escola. Não exige cálculos, pensamos que esta tarefa possibilita produção de significado, pois o aluno pode observar e defender o que julga correto sobre o episódio de história da matemática tratado no texto.

### 7.3 Tarefa II

#### Medição da altura do poste

Partindo do conhecimento que obteve sobre o problema da altura da pirâmide. Determine a altura do poste na figura abaixo. Não deixe de registrar todos os seus dados nas fichas.

Problema



Fonte: Souza (2010, p.266).

#### 7.3.1 Considerações sobre a tarefa II

Na tarefa II existe semelhança com problemas encontrados em livros didáticos. Mas a operação dos alunos partirá da leitura do episódio do cálculo da altura da pirâmide. A ideia é que os alunos tenham a percepção e visualizem dois triângulos retângulos, não é necessário que eles desenhem, mas é importante que descrevessem os procedimentos utilizados, sempre deve haver este convite.

## 7.4 Tarefa III

### Explorando

1) Imagine que sua sombra projetada no chão em determinado momento do dia seja de 60 cm. E que a sombra de uma árvore, também projetada no chão seja de dois metros. Determine de acordo com o que foi estudado, a altura desta árvore. Registre seus dados por meio de escritos e desenhos nas fichas.

2) Você conhece alguma maneira de medir alturas inalcançáveis? Escreva sobre ela(s).

#### 7.4.1 Considerações sobre a tarefa III

Acreditamos que tarefas que possibilitem a movimentação física e cognitiva dos alunos sejam mais eficientes para alguns propósitos de aprendizagem. Nesta tarefa, devemos fornecer aos alunos os materiais, trenas, prancheta, que não são tão usuais. Os alunos tem que medir suas próprias alturas e elaborar um esquema desta situação expressando seus cálculos. Na segunda alternativa da Tarefa III os alunos a partir de suas experiências vividas e não vividas comentam sobre métodos conhecidos e desconhecidos para medir alturas inalcançáveis. Esta tarefa em nossa percepção articula o que é conhecido, com o desconhecido, e também estabelece um convite para professor e aluno, aprenderem juntos.

## 7.5 Tarefa IV

### Vamos medir alturas de objetos?

Vamos medir a altura de objetos fora da sala, a partir da sombra, utilizando o método de Tales de Mileto? Levando somente, papel, calculadora, lápis, borracha, trena ou fita métrica como recursos disponíveis. Realize as medições com os mesmos objetos em três momentos diferentes do dia. Não vale escalar. Registrem todos os passos e esquematizem os problemas que criarem.

Sugestões de objetos: Caixa d'água, postes, árvores, mastro da bandeira.

Sugestões de horários: 09:00, 12:00 e 15:00.

#### 7.5.1 Considerações sobre a Tarefa IV

O objetivo desta tarefa além da produção de significado é permitir o uso dos espaços da Escola assimilando o comprimento das sombras de objetos ao conhecimento

TAREFAS DIDÁTICAS COM USO DE EPISÓDIOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA VISANDO A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO SOBRE O TEOREMA DE TALES

e ideia de proporcionalidade de acordo com o método de Tales de Mileto na aquisição de seu teorema. É importante o trabalho em grupo para coleta de medidas e o fornecimento de materiais aos alunos. Devemos perceber bem o momento que os alunos se deslocarão de suas salas em outros horários para as medições.

## REFERÊNCIAS

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; NOBRE, Sergio Roberto. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO: Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 129-136. (Coleção Seminários & Debates)

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; TEIXEIRA, Marcos Vieira; NOBRE, Sergio Roberto. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012. p.199-202.

BONGIOVANNI, Vincenzo. O teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. **Revemat**, Santa Catarina (SC), v. 2, n. 5, p.94-106, 2007.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. 2. ed. trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Matemática. Brasília, 2000.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **Empatia e história da matemática**. v. 2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Série história da matemática par o ensino)

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CHAQUIAM, Miguel. **História da Matemática em sala de aula: proposta para integração dos conteúdos matemáticos**. v. 10. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (Série história da matemática no ensino médio)

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais?**. 2004. 254f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

CHAVES, Rodolfo; RODRIGUES, Caio Lopes. A questão da incomensurabilidade: do embaraço pitagórico às obras de Leonardo Da Vinci — uma proposta de Educação Matemática pela História e pela Arte. IV Escola de Inverno de Educação Matemática da UFSM/CCNE, 2014. **Anais...** p.1-68.

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. In: **Cadernos CEDES 40**. História e Educação Matemática. 1. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, p.7-17.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e política e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115 (Coleção Seminários & Debates)

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 2. ed. 1. v. São Paulo: Ática, 2013.

DOBERSTEIN, Arnaldo Walter. **O Egito Antigo**. Porto Alegre: ediPUCRS, 2010.

EUCLIDES. **Os Elementos**: Euclides. trad. e int. Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. trad. Hygino H. Domingues. Campinas – SP: Unicamp, 2004.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática: dos números à geometria**. Osasco (SP): Edifio, 2008.

GARBI, Gilberto. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; SILVA, Carmen Kaiber; MORA, Castor David. Perspectiva em educação matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p.37-55, jan-jun. 2004.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. **Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. 2000. 230f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

HUISMAN, Denis. **Dicionário dos filósofos**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade: 9º ano**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

LARA, Isabel Cristina Machado de. O ensino da matemática por meio da história da matemática: possíveis articulações com a etnomatemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 33, n. 2, p. 51-62, jul./dez., 2013.

LINS, Romulo Campos. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 372 f. Thesis (Doutorate degree in Philosophy) – University of Nottingham, Nottingham, 1992.

LINS, Romulo Campos. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo, v.1, n.1, p.75-91. 1993.

LINS, Romulo Campos. Campos semánticos y el problema del significado em álgebra.. **UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n.01, p.45-56, jul., 1994.

LINS, Romulo Campos. Luchar por la supervivencia: la producción de significado. **UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n.14, p.39-46, out., 1997.

LINS, Romulo Campos. GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para oséculo XXI**. 4. ed. Campinas, SP: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p.75-94.

LINS, Romulo Campos. **A diferença como oportunidade para aprender**. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIÁTICAS E PRÁTICAS DE ENSINO. 14., Porto Alegre. Anais ... Porto Alegre: Edi PUCRS, 2008. p.530-550.

LINTZ, Rubens Gouveia. **História da Matemática**. 3. ed. Blumenau: FURB, 1999.

LOPES, Antônio José; GIMENEZ, Joaquim Rodriguez. **Metodologia para o ensino da Aritmética: Competência numérica no cotidiano**. São Paulo: FTD, 2009.

LOTH, Maria Helena Marques. **Uma investigação sobre a produção de tarefas aritméticas para o 6º ano do Ensino Fundamental**. 2011. 212 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

MENDES, Iran Abreu. **Ensino da Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática**. 2001. 283f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2001.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. História no Ensino da Matemática: trajetórias de uma epistemologia didática. **Rematec**, Natal (RN), a. 8. n. 12, p. 66-85, 2013.

MICHALOVICZ, Solange. Uma atividade pedagógica articulando história da matemática e resolução de problemas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 10., Curitiba. **Anais ...** Curitiba: UFPR, 2009. p.505-515.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática: propostas e desafios**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Tendências em Educação Matemática)



NOBRE, Sérgio. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, Bauru (SP), v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

PAULA, Marília Rios de. **Razão como taxa**: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática. 2012. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012a.

PAULA, Marília Rios de. **Razão como taxa**: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática. 2012. 30f. Produto Educacional (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012b.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Teorema de Thales**: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de matemática. 2005. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SANTIAGO, Laura Andrade; MORAIS, Wendy Mesquita de. O uso de episódios históricos no ensino de matemática: uma sequência didática utilizando quadrinhos. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa; CEDRO, Wellington Lima. (Orgs.). **Educação matemática**: diferentes contextos, diferentes abordagens. 1. ed. Fortaleza: EdUECE, 2015. p. 89-107.

PROVETTI JÚNIOR, José. Tales de Mileto e a aplicação filosófica da Matemática. **Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica**. Goiânia (GO), a. 2, v. 2, n. 7, p.157-181, 2016.

RIBEIRO, Dione Baptista; COSTA, Luciano Pecoraro; PAULA, Marília Rios de. Por que é importante ouvir os alunos. In: SIMPÓSIO PEDAGÓGICO E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO, 9., Juiz de Fora. **Anais ... UFJF**, Juiz de Fora, 2014. s. p.

ROQUE, Ana Catarina Cantoni. **Uma investigação sobre a participação da história da matemática em uma sala de aula do ensino fundamental**. 2012. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012a.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012b.

SAD, Lígia Arantes. Uma abordagem epistemológica do cálculo. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO, 23. 2000, Caxambu (MG). **Anais ... Caxambu (MG)**: ANPED, 2000, s. p.

SANTOS, Rosana. **As dificuldades e possibilidades de professores de matemática a utilizarem o Software Geogebra em atividades que envolvem o Teorema de Tales**. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTOS, Márcia Nunes dos. **A história da matemática como desencadeadora de atividades investigatórias sobre o teorema de Tales**: análise de uma experiência realizada com uma classe do 9.º ano do ensino fundamental de uma escola pública de ouro preto (mg). 2012. 180 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto (MG), 2012.

SANTOS, Edilene Simões Costa dos; MUNIZ, Cristiano Alberto; GASPAR, Maria Terezinha Jesus. **A construção do conceito de área e perímetro a partir de atividades fundamentadas na história da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (Série história da matemática para o ensino)

SILVA, Amarildo Melchíades. **Sobre a dinâmica de produção de significados para a matemática**. 2003. 244 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SOUZA, Joamir. **Matemática**. 1. ed. 1. v. São Paulo: FTD, 2010.

VALDÉS, Juan Nápoles. **La Historia como elemento unificador em la Educación Matemática**. Argentina, 2002.

VIANNA, Carlos Roberto. Usos didáticos para a História da Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. 1., Recife. **Anais ...** UFPE, Recife, 1998. s.p.